LA DERIVADA DE DINI Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Ángela Yaneth Franco[1]
Universidad de Panamá
Centro Regional Universitario de Veraguas, Panamá
angela06franco@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7085-6870

Temístocles Zeballos Mitre[2]
Universidad de Panamá
Centro Regional Universitario de Azuero, Panamá
temistocles@matematicacrua.com
https://orcid.org/0000-0002-1557-5769

DOI: 10.37594/oratores.n18.829

Fecha de recepción:15/03/2023 Fecha de revisión: 12/04/2023 Fecha de aceptación:16/04/2023

RESUMEN

En el estudio del cálculo diferencial e integral y especialmente en el análisis real, las derivadas de Dini son una clase de generalización de derivadas, introducidas por Ulisse Dini (1845 – 1918), para estudiar las funciones continuas que no son diferenciables. En este trabajo se presenta la definición de las cuatro derivadas de Dini y se establecen sus propiedades más importantes. También se caracterizan las funciones monótonas a través del signo de las cuatro derivadas de Dini de estas funciones y se prueba que el conjunto de los puntos donde la función no es diferenciable tiene medida cero. Finalmente, se presenta una versión del teorema fundamental del cálculo, pero ahora usando la derivada de Dini $D^{+}f(x)$.

Palabras clave: Continuidad, diferenciabilidad, derivadas de Dini, funciones monótonas, conjunto nulo.

1 Licenciada en Matemática, Universidad de Panamá, Panamá; Profesora de Educación Media con Especialización en Matemática, Universidad de Panamá, Panamá; Magíster en Docencia Superior, Universidad Latina de Panamá, Panamá; Magíster en Dificultades en el Aprendizaje de la Matemática, UDELAS, Panamá; Especialista en Entornos Virtuales de Aprendizaje, Universidad de Panamá, Panamá; Maestría en Ciencias con Especialización en Matemática Educativa, Universidad de Panamá, Panamá; Maestría en Matemática, Universidad Tecnológica de Panamá, Panamá.

2 Licenciado en Matemática, Universidad de Panamá, Panamá; Profesor de Educación Media con Especialización en Matemática, Universidad de Panamá, Panamá; Especialista en Matemática Educativa, Universidad de Panamá, Panamá; Especialista en Matemática, Universidad de Panamá, Panamá; Especialista en Docencia con Especialización en Matemática, Universidad de Panamá, Panamá; Especialista en Docencia Superior, Universidad de Panamá, Panamá; Magíster en Dificultades en el Aprendizaje de la Matemática, UDELAS, Panamá; Especialista en Entornos Virtuales de Aprendizaje, Universidad de Panamá, Panamá; Maestría en Matemática Pura, Universidad de Panamá, Panamá.

DINI DERIVATIRE AND THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

ABSTRACT

In the study of differential and integral calculus and especially in real analysis, Dini derivatives are a type of generalization of derivatives, introduced by Ulisse Dini (1845 – 1918), to study continuous functions that are not differentiable. In this work, the definition of the four Dini derivatives is presented and their most important properties are given. Monotone functions are also characterized by the sign of their four Dini derivatives and it is proved that the set of points where the function is not differentiable has measure zero. Finally, a version of the fundamental theorem of calculus is presented, but now using the Dini derivative $D^{+}f(x)$.

Keywords: continuity, differentability, Dini Derivatives, null set, the fundamental theorem of calculus

INTRODUCCIÓN

La relevancia histórica del teorema fundamental del cálculo diferencial e integral es la constancia que los procesos de derivación e integración, distintos en apariencia, están estrechamente relacionados (Dunham, 2018), (Edward, 1994). Además, es una herramienta poderosa que permite recobrar una función continuamente diferenciable a través de la integral indefinida de su derivada, o sea que se tienen las fórmulas (Bartle, 2011), (Gordon, 2002), (Folland, 2007)

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$$

y

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=f(x), \qquad\qquad x\in[a,b]$$

En este artículo se presentan las cuatro derivadas de Dini de una función y se enuncian las propiedades más sobresalientes, especialmente cuando la función es monótona. También se desarrollan unos ejemplos, donde se visualiza la relación que existe entre estas cuatro derivadas. Finalmente se presenta una versión del teorema fundamental del cálculo diferencial e integral, pero ahora usando una de las derivadas de Dini.

METODOLOGÍA

El Teorema Fundamental del Cálculo es el teorema más importante de la teoría del cálculo diferencial e integral, ya que establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial (cálculo de tangentes) y el cálculo integral (cálculo de cuadraturas); indicando que, de cierta manera, los procesos de diferenciación e integración son inversos. Una consecuencia directa de este teorema es el segundo teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow, que permite calcular la integral definida de una función utilizando la primitiva de la función integrando; es decir, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función con derivada continua en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a) \text{ (fórmula de Barrow).}$$

Sin embargo, si f es solamente diferenciable en $[a,b]$, entonces no se puede asegurar que la función derivada f' sea Riemann integrable en $[a,b]$ y, por lo tanto, la fórmula de Barrow no tendría sentido.

Con el objetivo de darle significado al teorema fundamental del cálculo en la teoría de integración de Riemann, se ha seguido la siguiente metodología. Primeramente, se extiende el concepto de derivada, definiendo las cuatro derivadas de Dini. Se enuncian las propiedades más sobresalientes, especialmente cuando la función es monótona. También se prueba que las cuatro derivadas de Dini $D^+f(x)$, $D_+f(x)$, $D^-f(x)$ y $D_-f(x)$ siempre existen en $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$.

Se prueba que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función monótona y continua en $[a,b]$, entonces $D^-f(x)\le D_+f(x)$ en $[a,b]$, excepto posiblemente en un conjunto de medida cero. Finalmente, se prueba que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua con $\left|D^+f(x)\right|<\infty$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces

$$\underline{\int_a^b} D^+f(x)dx \le f(b)-f(a) \le \overline{\int_a^b} D^+f(x)dx$$

para cada intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ y, se deduce que si $D^+f(x)$ es Riemann integrable en todo intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b D^+f(x)dx = f(b)-f(a)$$

Obteniendo así, una versión generalizada de la fórmula de Barrow.

PRELIMINARES

Sea $A\subset\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de A y $f:A\to\mathbb{R}$ una función. Para cada $\varepsilon>0$ denote:

$$M_\varepsilon(f,x_0)=\sup\left\{f(x):x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\cap A, x\ne x_0\right\}$$

y

$$m_\varepsilon(f,x_0)=\inf\left\{f(x):x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\cap A, x\ne x_0\right\}$$

Note que si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces

$$m_{\varepsilon_1}\left(f, x_0\right) \geq m_{\varepsilon_2}\left(f_1, x_0\right) \text{ y } M_{\varepsilon_1}\left(f, x_0\right) \leq M_{\varepsilon_2}\left(f_1, x_0\right)$$

Definición 1: El límite superior de f cuando x tiende a x_0 se denota por $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ y se define por

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf\left\{M_\varepsilon\left(f, x_0\right) : \varepsilon > 0\right\} .$$

De igual manera, el límite inferior de f cuando x tiende a x_0 se denota por $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ y se define por

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup\left\{m_\varepsilon\left(f, x_0\right) : \varepsilon > 0\right\}.$$

Estos límites siempre están definidos en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \left\{-\infty, \infty\right\}$; además,

Ejemplo 1: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 \quad , & \text{si } x = 0 \\ 1 \quad , & \text{si } x \in \mathbb{Q} \quad , x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tome $x_0 = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$m_\varepsilon(f, 0) = 0 \text{ y } M_\varepsilon(f, 0) = 1 .$$

Por lo tanto,
$\liminf\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\limsup\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Propiedades:

1. Si $t < \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$, entonces existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, se tiene que

$$t < m_{\varepsilon_0}(f, x_0) \leq m_\varepsilon(f, x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x)$$

2. Si $t > \limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$, entonces existe un $_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, se tiene que

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq M_\varepsilon(f, x_0) \leq M_{\varepsilon_0}(f, x_0) < t$$

3. Si $0 \leq c < \infty$, entonces
i) $\liminf\limits_{x \to x_0} \left(cf(x)\right) = c \liminf\limits_{x \to x_0} f(x)$
ii) $\limsup\limits_{x \to x_0} \left(cf(x)\right) = c \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$

4. Si $-\infty < c < 0$, entonces
i) $\liminf\limits_{x \to x_0} \left(cf(x)\right) = c \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$
ii) $\limsup\limits_{x \to x_0} \left(cf(x)\right) = c \liminf\limits_{x \to x_0} f(x)$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k \in \mathbb{R}^*$, si y solo si, $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = k$

6. Sea $k \in \mathbb{R}^*$. Entonces, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$ si y solo si

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq k \text{ y } \limsup_{x \to x_0} f(x) \leq k .$$

Denote

$$m_\varepsilon^-\left(f, x_0\right) = \inf\left\{f(x) : x \in \left(x_0 - \varepsilon, x\right) \cap A\right\}$$
$$M_\varepsilon^-\left(f, x_0\right) = \sup\left\{f(x) : x \in \left(x_0 - \varepsilon, x\right) \cap A\right\}$$
$$m_\varepsilon^+\left(f, x_0\right) = \inf\left\{f(x) : x \in \left(x_0, x_0 + \varepsilon\right) \cap A\right\}$$
$$M_\varepsilon^+\left(f, x_0\right) = \sup\left\{f(x) : x \in \left(x_0, x_0 + \varepsilon\right) \cap A\right\}$$

Definición 2: El límite inferior por la izquierda de f cuando x tiende a x_0 se denota por $\liminf\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y se define por

$$\liminf_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\left\{m_\varepsilon^-(f, x_0) : \varepsilon > 0\right\} .$$

El límite superior por la izquierda de f cuando x tiende a x_0 se denota por $\limsup\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y se define por

$$\limsup_{x \to x_0^-} f(x) = \inf\left\{M_\varepsilon^-(f, x_0) : \varepsilon > 0\right\} .$$

De igual manera se definen los límites por la derecha

$$\liminf_{x \to x_0^+} f(x) = \sup\left\{m_\varepsilon^+(f, x_0) : \varepsilon > 0\right\}$$

y

$$\limsup_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\left\{M_\varepsilon^+(f, x_0) : \varepsilon > 0\right\} .$$

Recuerde que el límite por la izquierda de f en x_0 se denota por $f(x-)$ y se define por

$$f(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x).$$

De igual manera, el límite por la derecha de f en x_0 se denota por $f(x+)$ y se define por

$$f(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x).$$

De las propiedades de los limites inferiores y superiores se tiene que:

$$f(x_0-) = k \in \mathbb{R}^*\text{, si y solo si, } \liminf_{x\to x_0^-} f(x) = \limsup_{x\to x_0^-} f(x) = k.$$

y

$$f(x_0+) = k \in \mathbb{R}^*\text{, si y solo si, } \liminf_{x\to x_0^+} f(x) = \limsup_{x\to x_0^+} f(x) = k.$$

Por otro lado, si I es un intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ y $f: I \to \mathbb{R}$ es una función, monótona, entonces:

• Si x_0 no es el extremo inferior de I, entonces $f(x_0-)$ existe.

• Si x_0 no es el extremo superior de I, entonces $f(x_0+)$ existe.

Más aún, si f es creciente (decreciente), entonces $f(x_0-) \le f(x_0)$ y $f(x_0) \le f(x_0+)$ (respectivamente, $f(x_0-) \ge f(x_0)$ y $f(x_0) \ge f(x_0+)$), si los términos están definidos.

Propiedades: Sean f_1, f_2 funciones definidas en un conjunto A y x_0 un punto de acumulación de A. Si las correspondientes operaciones están definidas, entonces se tiene que (Bartle, 2011), (Gordon, 2002), (Natanson, 2016):

1. $\limsup_{x\to x_0} \left(f_1(x) + f_2(x)\right) \le \limsup_{x\to x_0} f_1(x) + \limsup_{x\to x_0} f_2(x)$.
2. $\liminf_{x\to x_0} \left(f_1(x) + f_2(x)\right) \ge \liminf_{x\to x_0} f_1(x) + \liminf_{x\to x_0} f_2(x)$.
3. $\limsup_{x\to x_0} \left(f_1(x) + f_2(x)\right) \ge \limsup_{x\to x_0} f_1(x) + \liminf_{x\to x_0} f_2(x)$.
4. $\liminf_{x\to x_0} \left(f_1(x) + f_2(x)\right) \le \liminf_{x\to x_0} f_1(x) + \limsup_{x\to x_0} f_2(x)$.
5. $\limsup_{x\to x_0} \left(f_1(x) - f_2(x)\right) \le \limsup_{x\to x_0} f_1(x) - \liminf_{x\to x_0} f_2(x)$.
6. $\limsup_{x\to x_0} \left(f_1(x) - f_2(x)\right) \ge \limsup_{x\to x_0} f_1(x) - \limsup_{x\to x_0} f_2(x) \ge \liminf_{x\to x_0} \left(f_1(x) - f_2(x)\right)$.
7. $\liminf_{x\to x_0} \left(f_1(x) - f_2(x)\right) \ge \liminf_{x\to x_0} f_1(x) - \limsup_{x\to x_0} f_2(x)$.
8. $\liminf_{x\to x_0} \left(f_1(x) - f_2(x)\right) \le \liminf_{x\to x_0} f_1(x) - \liminf_{x\to x_0} f_2(x) \le \limsup_{x\to x_0} \left(f_1(x) - f_2(x)\right)$

9. Suponga que $\lim_{x\to x_0} f_2(x)$ existe, entonces

$$\limsup_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=\limsup_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)$$
$$\liminf_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=\liminf_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)$$

Definición 3: Sea $x_0 \in A$ un punto de acumulación y $f: A \to \mathbb{R}$ una función.

i. f es semicontinua inferiormente en x_0 si $\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

ii. f es semicontinua superiormente en x_0 si $\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

Note que f es continua en x_0 si y solo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0.

Definición 4: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. A es un conjunto nulo o tiene medida cero y se denota por $m(A)=0$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos abiertos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \ell\left(I_n\right) < \varepsilon$$

donde $\ell\left(I_n\right)$ es la longitud del intervalo I . El valor $\sum_{n=1}^{\infty} \ell\left(I_n\right)$ es llamado la **longitud total** de los intervalos $I_1, I_2 ...$; sin el requerimiento que estos intervalos sean disjuntos dos a dos.

Propiedades

1. Si A es un conjunto enumerable (finito o infinito), entonces $m(A)=0$. En particular, $m(\mathbb{Q})=0$.
2. Si $A \subset B$ y $m(B)=0$, entonces $m(A)=0$.

3. Si $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $m(A_n)=0$ para todo , entonces $m(A)=0$.

(Natanson, 2016), (Orchinnikov, 2013).

Definición 5: Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f: A \to \mathbb{R}$ una función.

i. f es continua casi en todo punto (c.t.p) en A si

$$m\left(\{x \in A : f \text{ es discontinua en } x\}\right)=0.$$

ii. f es diferenciable c.t.p de A si $m\left(\{x \in A : f \text{ no es diferenciable en } x\}\right)=0$

iii. En general, sea $A \subset \mathbb{R}$. Si para algunos de los elementos de A un enunciado $P(x)$ es definido, entonces se dice que P se satisface casi en todas partes en A, si el conjunto de todos los puntos $x \in A$ para los cuales $P(x)$ no está definido o es falso tiene medida cero. Se usará c.t.p como una abreviatura para *"casi en todas partes"*

Teorema 1: Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona, entonces $Disc(f) = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ es discontinua en } x\}$ es a lo sumo enumerable.

Teorema 2: Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces $cont(f') = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f' \text{ es continua en } x\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Teorema 3: (Criterio de Integrabilidad de Lebesgue): Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solo si $m\left(\{x \in [a,b] : f \text{ es discontinua en } x\}\right) = 0$.

LAS DERIVADAS DE DINI

En lo que sigue se introducen varios conceptos de derivabilidad.

Definición 6: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in [a,b]$.

i. La derivada superior de f en x_0 se denota por $\overline{D}f(x_0)$ y se define por

$$\overline{D}f(x_0) = \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ii. La derivada inferior de f en x_0 se denota por $\underline{D}f(x_0)$ y se define por

$$\underline{D}f(x_0) = \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Note que estos dos límites siempre existen en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, pero ellos no siempre son iguales. De hecho, $\overline{D}f(x_0) = \underline{D}f(x_0) = k \in \mathbb{R}$ si y solo si f es diferenciable en x_0 y, en este caso $f'(x_0) = k$.

Definición 7: (Derivadas de Dini): Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in [a,b]$.

i. Si $x_0 < b$, entonces:

a) La derivada superior derecha (de Dini) de f en x_0 se define por

$$D^+ f(x_0) = \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

b) La derivada inferior derecha de f en x_0 se define por

$$D_+ f(x_0) = \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ii. Si $x_0 > a$, entonces:

a) La derivada superior izquierda de f en x_0 se define por

$$D^- f(x_0) = \limsup_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

b) La derivada inferior izquierda de f en x_0 se define por

$$D_- f(x_0) = \liminf_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

iii. Si $x_0 < b$ y $D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0)$, a este valor común se le llama la derivada por la derecha de f en x_0 y se denota por $f'(x_0+)$; o sea,

$$f'(x_0+) = \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}^*$$

iv. Si $x_0 > a$ y $D^- f(x_0) = D_- f(x_0)$, a este valor común se le llama la derivada por la izquierda de f en x_0 y se denota por $f'(x_0-)$; o sea,

$$f'(x_0-) = \limsup_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \liminf_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}^*$$

Las cuatro derivadas $D^+ f(x_0)$, $D_+ f(x_0)$, $D^- f(x_0)$ y $D_- f(x_0)$ se llaman las derivadas de Dini de f en x_0 y, siempre existen en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Note que f es derivable en x_0 si y solo si $f'(x_0-) = f'(x_0+) \in \mathbb{R}$; es decir, si las cuatro derivadas de Dini de f en x_0 son iguales y finitas. Este valor común es igual a $f'(x_0)$. Además, si $x_0 \in (a, b)$, entonces

$$\underline{D}\, f(x_0) \le D\ f(x_0) \le D\ f(x_0) \le \overline{D} f(x_0)$$

$$\underline{D}\, f(x_0) \le D_- f(x_0) \le D^- f(x_0) \le \overline{D} f(x_0)$$

$$\overline{D} f(x_0) = \sup\{D^+ f(x_0), D^- f(x_0)\}$$

$$\underline{D}\, f(x_0) = \inf\{D_+ f(x_0), D_- f(x_0)\}$$

Ejemplo 2: Sea $f:\square \to \square$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} |2x| & , \quad \text{si } x\in \square \\ |3x| & ,\text{si } x\in \square - \square \end{cases}$$

entonces

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x} \ .$$

Por lo tanto,

$$D^{+}f(0)=3,\ D_{+}f(0)=2,\ D^{-}f(0)=-2,\ D_{-}f(0)=-3 \ .$$

Por otro lado, como

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\left(f(x)\right)-2}{(x-1)} \ .$$

Se tiene que

$$D^{+}f(1)=\infty,\ D_{+}f(1)=2,\ D^{-}f(1)=2,\ D_{-}f(1)=-\infty \ .$$

Por lo tanto,

$$\overline{D}f(0)=3,\ \underline{D}\ f(0)=-3;\ \overline{D}f(1)=\infty,\ \underline{D}\ f(1)=-\infty \ .$$

Observe que si $f:\square \to \square$ es una función y $k\in \square$, entonces

i. Si $D^{+}f(x_0)>k$, entonces para todo $\varepsilon>0$ existe un $0<h<\varepsilon$ tal que

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>k \ .$$

ii. Si $D_{-}f(x_0)<k$, entonces para todo $\varepsilon>0$ existe un $0<h<\varepsilon$ tal que

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}<k \ .$$

Ejemplo 3: Sea $f:\square \to \square$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\ sen\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$$

Entonces

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=sen\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{|f|(x)-|f|(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}\left|sen\frac{1}{x}\right|$$

Por lo tanto,

$$D^{+}f(0)=1,\ D_{+}f(0)=-1,\ D^{-}f(0)=1,\ D_{-}f(0)=-1$$

y

$$D^{+}|f|(0)=1,\ D_{+}|f|(0)=0,\ D^{-}|f|(0)=0,\ D_{-}|f|(0)=-1$$

Ejemplo 4: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función de Dirichlet definida por

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,\quad \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ,\text{si } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

Si $x_0\in\mathbb{Q}$, entonces

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-1}{x-x_0}$$

y ,

$$D^{+}f(x_0)=0,\ D_{+}f(x_0)=-\infty,\ D^{-}f(x_0)=\infty,\ D_{-}f(x_0)=0$$

Si $x_0\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, entonces

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)}{x-x_0}$$

y ,

$$D^{+}f(x_0)=\infty,\ D_{+}f(x_0)=0,\ D^{-}f(x_0)=0,\ D_{-}f(x_0)=-\infty$$

Ejemplo 5: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}\ .$$

Entonces

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\ .$$

Por lo tanto,

$$D^{+}f(0)=D_{+}f(0)=D^{-}f(0)=D_{-}f(0)=\infty$$

y

$$\overline{D}f(0)=\underline{D}\ f(0)=\infty\ .$$

Sin embargo, f no es diferenciable en $x=0$ (En este caso se dice que $f'(0)$ existe en $\mathbb{R}^{*}$ y $f'(0)=\infty$) (Gelbaum, 2003).

Propiedades: Sean $f_1,f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $x\in[a,b]$. Las siguientes desigualdades son verdaderas, siempre que las sumas sean posible

1. $\overline{D}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)\leq\overline{D}f_1(x)+\overline{D}f_2(x)$
2. $\underline{D}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)\geq\underline{D}f_1(x)+\underline{D}f_2(x)$
3. $\overline{D}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)\geq\overline{D}f_1(x)+\underline{D}f_2(x)$
4. $\underline{D}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)\leq\underline{D}f_1(x)+\overline{D}f_2(x)$
5. $\overline{D}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\leq\overline{D}f_1(x)-\underline{D}f_2(x)$
6. $\overline{D}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\geq\overline{D}f_1(x)-\overline{D}f_2(x)\geq\underline{D}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)$
7. $\underline{D}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\geq\underline{D}f_1(x)-\overline{D}f_2(x)$
8. $\overline{D}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\geq\underline{D}f_1(x)-\underline{D}f_2(x)\geq\underline{D}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)$

Más aún, si $x<b$, se pueden reemplazar $\overline{D}$ y $\underline{D}$ por D^{+} y D_{+} respectivamente, en todas las desigualdades y; si $x>a$, se pueden reemplazar $\overline{D}$ y $\underline{D}$ por D^{-} y D_{-}, respectivamente en todas las desigualdades.

Todas estas 24 desigualdades se deducen de las 8 desigualdades de los límites inferiores y límites superiores (Natanson, 2016), (Orchinnikov, 2013).

9. Suponga que f_1-f_2 es creciente en $[a,b]$, entonces

$$\overline{D}f_1(x)\geq\overline{D}f_2(x)\ \text{ y }\ \underline{D}f_1(x)\geq\underline{D}f_2(x)$$

para todo $x\in[a,b]$.

• Si $a\leq x\leq b$, se pueden reemplazar $\overline{D}$ y $\underline{D}$ por D^{-} y D_{-}, respectivamente en estas desigualdades.

• Si $a\leq x<b$, se pueden reemplazar $\overline{D}$ y $\underline{D}$ por D^{+} y D_{+}, respectivamente en estas desigualdades.

10. Si f_2 tiene derivada por la derecha en x, entonces

$$D^+\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=D^+f_1(x)+f_2'(x+)$$
$$D_+\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=D_+f_1(x)+f_2'(x+)$$

11. Si f_2 tiene derivada por la izquierda en x, entonces

$$D^-\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=D^-f_1(x)+f_2'(x-)$$
$$D_-\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=D_-f_1(x)+f_2'(x-)$$

Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, se puede definir la función $g:[-b,-a]\to\mathbb{R}$ por $g(x)=-f(-x)$. La relación entre las derivadas de $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$ y $-f(-x)$ son las siguientes

i. $D^+\left(-f(x)\right)=-D_+f(x)$, $D_+\left(-f(x)\right)=-D^+f(x)$

ii. $D^+\left(f(-x)\right)=-D_-f(x)$, $D_+\left(f(-x)\right)=-D^+f(x)$

iii. $D^+\left(-f(-x)\right)=D^-f(x)$, $D_+\left(-f(-x)\right)=D_-f(x)$

En las identidades anteriores se pueden intercambiar los signos + y – en la letra D.
También se tiene

iv. $\overline{D}\left(-f(x)\right)=\overline{D}f(-x)=-\underline{D}f(x)$

v. $\underline{D}\left(-f(x)\right)=\underline{D}f(-x)=-\overline{D}f(x)$

vi. $\overline{D}\left(-f(-x)\right)=\overline{D}f(x)$, $\underline{D}\left(-f(-x)\right)=\underline{D}f(x)$.

Aquí se sobre entiende; por ejemplo, que $D_+\left(-f(-x)\right)$ denota la derivada inferior por la derecha de la función $g(z)=-f(-x)$ con respecto a z en el punto $z=-x$.

Teorema 4: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función y $x\in[a,b]$. Si $\overline{D}f(x_0)$ y $\underline{D}f(x_0)$ son ambos finitos, entonces f es continua en x_0.

Demostración:

Sea $M = \max\left\{\left|\overline{D}f(x_0)\right|, \left|\underline{D}\ f(x_0)\right|\right\} \in \mathbb{R}$. Luego por la definición de estas derivadas, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$-M \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq M$$

Para todo $x \in \left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right) \cap \left[a,b\right]$, $x \neq x_0$. Por lo tanto

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq M$$

y

$$\left|f(x)-f(x_0)\right| \leq M\left|x-x_0\right|$$

para todo $x \in \left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right) \cap \left[a,b\right]$. Esto implica que f es continua en x_0.

Teorema 5: Sea $f:\left[a,b\right] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es creciente en $\left[a,b\right]$ si y solo si $D^+f(x) \geq 0$ para todo $x \in \left(a,b\right)$.

Demostración:

Suponga que f es creciente en $\left[a,b\right]$, entonces el cociente

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$$

para todo $x, y \in \left[a,b\right]$. Por lo tanto, $D^+f(x) \geq 0$ para todo $x \in \left(a,b\right)$.

Suponga que $D^+f(x) > 0$ para todo $x \in \left(a,b\right)$. Suponga que existen $z_1, z_2 \in (a,b)$ tal que $z_1 < z_2$ y $f(z_1) > f(z_2)$, entonces existe un α con $f(z_1) > \alpha > f(z_2)$ y algunos puntos $t \in (z_1, z_2)$ tal que $f(t) > \alpha$ (ya que es continua en $\left[z_1, z_2\right]$). Sea

$$\varepsilon = \sup\left\{t \in (z_1, z_2) : f(t) > \alpha\right\}$$

Obviamente, $\varepsilon \in (z_1, z_2)$ y, por la continuidad de f, se tiene que $f(\varepsilon) = \alpha$. Luego, para todo $t \in (\varepsilon, z_2)$, se tiene que

$$\frac{f(t)-f(\varepsilon)}{t-\varepsilon}=\frac{f(t)-f(\alpha)}{t-\varepsilon}\leq 0$$

Por lo tanto, $D^{+}f(\varepsilon)\leq 0$, lo que es una contradicción. Por consiguiente f es creciente en $[a,b]$. Suponga ahora que $D^{+}f(x)\geq 0$ para todo $x\in(a,b)$ y sea $\varepsilon>0$.

Entonces

$$D^{+}\left(f(x)+\varepsilon x\right)=D^{+}f(x)+\varepsilon\geq\varepsilon>0$$

Para todo $x\in(a,b)$. Luego, por lo probado anteriormente, se tiene que $f(x)+\varepsilon x$ es creciente en $[a,b]$ para todo $\varepsilon>0$. Esto implica que f es creciente en $[a,b]$.

Observación:

1. Como $D_{+}f(x)\leq D^{+}f(x)$ el teorema anterior es verdadero si $D^{+}f(x)\geq 0$ se reemplaza por $D_{+}f(x)\geq 0$.
2. El teorema anterior sigue siendo verdadero si se reemplaza la desigualdad $D^{+}f(x)\geq 0$ por $D^{-}f(x)\geq 0$. Solo es necesario tomar

$$\varepsilon=\inf\left\{t\in(z_1,z_2):f(t)<\alpha\right\}$$

3. En la modificación dada en (2) también se puede reemplazar $D^{-}f(x)\geq 0$ por $D_{-}f(x)>0$. Como una consecuencia se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 6: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es creciente (decreciente) en $[a,b]$ si y solo si cualquiera de las cuatro derivadas de Dini de f es no negativa (respectivamente no positivo) en (a,b).

Corolario 1: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Si una de las cuatro derivadas de Dini de f es mayor o igual a cero en (a,b), entonces lo mismo es cierto para las otras tres derivadas de Dini de f en (a,b).

Teorema 7: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y $k>0$. Si $D^{*}f(x)\geq -k$ para todo $x\in(a,b)$, entonces

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq -k$$

Donde $D^* f(x)$ representa cualquiera de las cuatro derivadas de Dini de f.

Demostración:

Como $D^* f(x) \geq -k$ para todo $x \in (a,b)$, de las propiedades de las derivadas de Dini se tiene que

$$D^*\left(f(x)+kx\right) \geq 0 \text{ para todo } x \in (a,b)$$

Luego, por el Teorema 6, la función $f(x)+kx$ es creciente en $[a,b]$. Por lo tanto

$$f(b)+kb \geq f(a)+ka$$

De donde

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq -k$$

Observación: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente (decreciente) y defina la función $g:[-b,-a] \to \mathbb{R}$ por $g(x)=f(-x)$. Entonces g es una función creciente (respectivamente decreciente).

Además, por las propiedades de las derivadas de Dini, se tienen que

$$D_- g(x) = D_+ f(-x) \text{ y } D^+ g(x) = D^- f(-x)$$

para todo $x \in [-b,-a]$.

Teorema 8: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona y continua. Entonces $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$ c.t.p en $[a,b]$; es decir, $\left\{x \in (a,b) : D_- f(x) < D^+ f(x)\right\}$ es un conjunto de medida cero.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que f es creciente (si f es decreciente, tome $-f$ en la demostración). Las cuatro derivadas de Dini de f son no negativas en (a,b). Sean $0 < r < R$ y considere el conjunto

$$V_r^R = \left\{x \in (a,b) : D_- f(x) < r < R < D^+ f(x)\right\}$$

V_r^R puede ser cubierto por una sucesión $\left\{\left(a_{n,k},b_{n,k}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos disjuntos dos a dos $\left(a_n,b_n\right)\subset(a,b)$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-a_n\right)\le\frac{r}{R}(b-a)$$

(Van Rooij,1982). Aplicando este resultado a la restricción de f en el intervalo $\left[a_n,b_n\right]$, se puede afirmar que el conjunto $V_r^R\cap\left(a_n,b_n\right)$ se puede cubrir por una sucesión $\left\{\left(a_{n,k},b_{n,k}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, $\left(a_{n,k},b_{n,k}\right)\subset\left(a_n,b_n\right)$, tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_{n,k}-a_{n,k}\right)\le\frac{r}{R}(b_n-a_n)$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(b_{n,k}-a_{n,k}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{r}{R}(b_n-a_n)=\frac{r}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\ (b_n-a_n)\le\frac{r^2}{R^2}\left(b-a\right)$$

Así, siguiendo este proceso inductivo, se puede cubrir el conjunto V_r^R por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, cuya longitud total es menor o igual que $\left(\frac{r}{R}\right)^n(b-a)$, para todo número natural n . Esto implica que V_r^R es un conjunto de medida nula, ya que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n=0$.

Por otro lado, como

$$\left\{x\in\left(a,b\right):D_-f(x)<D^+f(x)\right\}=\cup\left\{V_r^R:r,R\in\mathbb{Q}^+,r<R\right\}$$

Y la unión enumerable de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero, se tiene que el conjunto $\left\{x\in\left(a,b\right):D_-f(x)<D^+f(x)\right\}$ es de medida cero.

Teorema 9: Sea $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ una función monótona continua. Entonces, $D^-f(x)\le D_+f(x)$ c.t.p en $\left[a,b\right]$ y, por lo tanto, las cuatro derivadas de Dini de f son iguales c.t.p en $\left[a,b\right]$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad se supondrá que f es creciente. Defina la función $g:\left[-b,-a\right]\to\mathbb{R}$ por $g(x)=f(-x)$. Entonces g es una función creciente y por las propiedades de las derivadas de Dini, se tiene que

$$D_{-}g(-x)=D_{+}f(x) \quad \text{y} \quad D^{+}g(-x)=D^{-}f(x)$$

Además, por el Teorema 8, $D^{+}g(-x)\leq D_{-}g(-x)$ c.t.p en $[a,b]$. Luego,

$$D^{-}f(x)=D^{+}g(-x)\leq D_{-}g(-x)=D_{+}f(x) \quad \text{c.t.p en } [a,b] .$$

Así pues

$$D^{-}f(x)\leq D_{+}f(x) \text{ c.t.p en } [a,b].$$

Nuevamente, por las propiedades de las derivadas de Dini y el Teorema 8, se tiene que

$$D_{-}f(x)\leq D^{-}f(x)\leq D_{+}f(x)\leq D^{+}f(x)\leq D_{-}f(x) \quad \text{c.t.p en } [a,b].$$

de donde

$$D_{-}f(x)=D^{-}f(x)=D_{+}f(x)=D^{+}f(x) \quad \text{c.t.p en } [a,b] .$$

ya que la unión finita de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero.

En el Teorema 9 no se ha probado que las funciones monótonas y continuas son diferenciables c.t.p en $[a,b]$. Para esta afirmación se necesita el siguiente teorema.

Teorema 10: Sea $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona y continua. Entonces

$$A=\left\{x\in(a,b):D^{+}f(x)=\infty\right\}$$

es un conjunto de medida cero.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que f es creciente. En efecto, para cada $n\in \mathbb{N}$ defina el conjunto $A=\left\{x\in(a,b):D^{+}f(x)>n\right\}$. Luego, $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ y cada A_n puede ser cubierto por una sucesión $\left\{(a_{n,k},b_{n,k})\right\}_{k=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos disjuntos dos a dos $(a_{n,k},b_{n,k})\subset(a,b)$ de longitud total $\sum_{k=1}^{\infty}(b_{n,k}-a_{n,k})\leq\frac{1}{n}(f(b)-f(a))$ (Van Rooij, 1982). Luego, como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f(b)-f(a))=0,$ se tiene que $m(A)=0$. Así,

$$0\leq D^{+}f(x)<\infty \text{, c.t.p en } [a,b] .$$

Teorema 11: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función monótona y continua entonces f es derivable c.t.p en $[a,b]$.

Demostración:
Por los Teoremas 9 y 10, las cuatro derivadas de Dini son iguales y diferentes de $\pm\infty$ c.t.p en $[a,b]$ Esto implica que f es derivable c.t.p en $[a,b]$.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En esta sección se probará que una función se puede recobrar como una integral indefinida de una de las derivadas de Dini.

Teorema 12: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $\left|D^{+}f(x)\right|<\infty$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Entonces

$$\underline{\int_a^b} D^{+}f(x)dx \le f(b)-f(a) \le \overline{\int_a^b} D^{+}f(x)dx$$

para cada intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, donde las integrales son las integrales inferiores y superiores, respectivamente, de Riemann.

Demostración:
Sea $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ y sea $I_i=[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,...,n$. Denote

$$m_i=\inf\left\{D^{+}f(x):x\in I_i\right\} \text{ y } M_i=\sup\left\{D^{+}f(x):x\in I_i\right\}$$

entonces $m_i\le D^{+}f(x)\le M_i$, para todo $x\in I_i$. Tome

$$g_i(x)=f(x)-m_i x \text{ y } h_i(x)=f(x)-M_i x$$

Por las propiedades de las derivadas de Dini se tiene que

$$D^{+}g_i(x)=D^{+}f(x)-m_i\ge 0 \text{ y } D^{+}h_i(x)=D^{+}f(x)-M_i\le 0$$

para todo $x\in(x_{i-1},x_i)$. Luego, por el Teorema 6, la función g_i es creciente en I_i y la función h_i es decreciente en I_i. Esto implica que

$$f(x_{i-1})-m_i x_{i-1}\le f(x_i)-m_i x_i \text{ y } f(x_{i-1})-M_i x_{i-1}\ge f(x_i)-M_i x_i$$

De donde

$$m_i \leq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \leq M_i$$

Para todo $i = 1, 2, ..., n$. Esto implica que

$$L\left(D^+ f, P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i, x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i, x_{i-1})$$

Por consiguiente

$$\underline{\int} D^+ f(x) dx \leq f(b) - f(a) \leq \overline{\int} D^+ f(x) dx$$

Corolario 2: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $D^+ f(x)$ es Riemann integrable en todo intervalo $\left[a, b\right]$ de $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b D^+ f(x) dx = f(b) - f(a)$$

Teorema 13: Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\left|D^+ f(x)\right| < \infty$ y $\left|D^+ g(x)\right| < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $D^+ f(x) = D^+ g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:
Por las propiedades de las derivadas de Dini, se tiene que

$$0 = D^+ f(x) - D^+ g(x) \leq D^+ \left(f(x) - g(x) \right) = D^+ \left(\left(f - g \right)(x) \right)$$
$$0 = D^+ g(x) - D^+ f(x) \leq D^+ \left(g(x) - f(x) \right) = D^+ \left(\left(g - f \right)(x) \right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, por el Teorema 6, las funciones $f - g$ y $g - f$ son crecientes en $\mathbb{R}$, lo que implica que $f - g$ es una función constante. Por consiguiente, existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

CONCLUSIONES

1. Las cuatro derivadas de Dini de una función existen en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \left\{-\infty, \infty\right\}$, sin embargo, ellas pueden ser iguales en un punto sin que la función sea diferenciable en ese punto. Tome por ejemplo la función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ y $x_0 = 0$.

2. Una función f es diferenciable en x_0 si las cuatro derivadas de Dini de f en x_0 son

iguales y finitas.

3. Dada una función monótona $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, entonces el conjunto $Dis(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: f \text{ es discontinua en } \mathbb{R}\right\}$ es a lo sumo enumerable, sin embargo $Ndif(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: f \text{ no es diferenciable en } \mathbb{R}\right\}$ es un conjunto de medida cero. (Kharazishvily, 2018)

4. Una función continua $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ es creciente (decreciente) en $\left[a,b\right]$ si y solo si cualquiera de las cuatro derivadas de Dini es no negativa (respectivamente no positiva) en (a,b).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bartle, R.G. and Sherbert, D.R (2011). Introduction to Real Analysis. John Wiley & Sons – Inc. USA.
- Dunham,(2018). The Calculus: Gallery Masterpieces from Newton to Lebesgue. Princeton University Press. U.S.A.
- Edward, C.H. 1994. The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag. USA.
- Folland, G. B. 2007. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. Wiley. USA.
- Gelbaum, B. R. and Olmsted, J.M.H. 2003. Counterexamples in Analysis. Dover Publications, Inc. USA.
- Gordon, R.A. (2002). Real Analysis. A first Course. Addison Wesley. USA.
- Kharazishvily, A. (2018). Strange Functions in Real Analysis. CRC Press Taylor & Francis Group. USA.
- Natanson, I. R. 2016. Theory of Functions of Real Variable. Volume I. Dover Publications, Inc. USA.
- Orchinnikov, S. 2013. Measure, Integral, Derivative: A Course on Lebesgue's Theory. Springer-Verlag. USA.
- Van Rooij, A.C.M. and Schikhof, W.H. (1982). A second Course on Real Functions. Cambridge University Press. USA.